非線形波動方程式系に基づく表面孤立波及び内部孤立波の数値解

Numerical Solutions of Surface and Internal Solitary Waves Based on Nonlinear Wave Equations

山下　啓[1]・柿沼太郎[2]

Kei YAMASHITA and Taro KAKINUMA

Numerical solutions of stationary progressive water waves are obtained through a new method using nonlinear wave equations, where advection equations are satisfied for physical quantities, i.e., surface/interface displacements, velocity, or velocity potential. In the calculation process, the Newton-Raphson method is applied to find convergence solutions. In the present study, the nonlinear wave equations based on a variational principle are adopted as the fundamental equations. Stationary solutions of traveling surface/internal solitary waves are obtained to be compared with the corresponding theoretical solutions, as well as numerical solutions of Euler equations, such that the accuracy of solutions through the wave equations is verified also for large amplitude internal solitary waves with large wave celerity and flatter wave profiles.

1. 序　　論

表面波や内部波を解析するために，様々な非線形波動方程式系が提案されている．例えば，表面波を対象とした Peregirine（1967）の Boussinesq 型方程式系や，2 層流体における内部波を対象とした Choi・Camassa（1999）の方程式系である．ところが，これらの方程式系は，摂動法を用いる導出時の仮定に伴い，水深波長比に対して適用限界を有する．これに対して，変分原理に基づき導かれた柿沼（2001）の方程式系は，波の非線形性及び分散性に対して仮定を用いずに導出されているため，密度成層が発達した水域に現れるような大振幅内部波の解析等に適していると考えられる．

ところで，波動方程式系を用いた進行波の数値解析では，ある境界において定常進行波を入射波として与えることが多い．その際，適用する波動方程式系に対して，定常進行波の解析解が得られていない場合，何らかの別の方法により求めた定常進行波を入射させる必要がある．この入射波を対象領域に入射させると，適用する波動方程式系の解と異なるため，水平床上においても変形が生じる．従って，助走区間を伝播させた後に得られた所定の定常進行波を対象領域に入射させる必要がある．例えば，中山ら（2010）は，大振幅の定常な入射波を求めるために，3 次オーダの内部孤立波の理論解を入射波としたが，助走区間を伝播させて定常進行波を得るために，多大な計算時間を要した．

そこで，本研究では，非線形波動方程式系（柿沼，2001）の定常進行波の数値解を求めるための手法を提案する．本手法は，Boussinesq 型方程式といった他の方程式系の定常進行波解を求める手法としても応用可能である．ここでは，この手法を用いて表面孤立波解及び内部孤立波解を求め，得られた数値解を理論解や数値解析解と比較し，解の妥当性を調べる．

1　学生会員　修(工)　鹿児島大学大学院 理工学研究科　生命環境科学専攻

2　正会員　博(工)　鹿児島大学大学院准教授 理工学研究科　生命環境科学専攻

2. 基礎方程式系及び数値解の算出手法

(1) 定常進行波に対する非線形波動方程式系

非粘性・非圧縮性である多層流体の，非回転運動を対象とする．互いに混合しない各流体層を最上層から順に第 i 層（$i = 1, 2, \cdots, I$）と呼ぶ．本研究では，第 i 層の速度ポテンシャルを $\phi_i(\boldsymbol{x},z,t)=\sum_{\alpha=0}^{N-1}\left\{f_{i,\alpha}(\boldsymbol{x},t)\cdot z^{\alpha}\right\}$ のように，N 個のべき関数の重み付き級数に展開する．そして，変分原理を適用して導出される表面波及び内部波の非線形波動方程式系（柿沼，2001）を基礎方程式系とする．

位相速度 C で伝播する定常進行波を考える．このとき，物理量は，一定速度 C で進行する．従って，移流方程式 $\partial F/\partial t = -C\,\partial F/\partial x$ が成り立つ．ここで，物理量 F は，水面変動 ζ，界面変動 η 及び，速度ポテンシャルの重み係数 $f_{i,\alpha}$ である．この式を上述した非線形波動方程式系の時間微分項に代入すると，位相速度 C をパラメタとする，定常進行波を解とする非線形波動方程式系が得られる．

なお，基礎方程式系として，例えば，表面波の流速場に対する Boussinesq 型の方程式系を適用する場合には，上記の物理量 F は，水面変動及び流速とする．

(2) 定常進行波の数値解の算出手法

定常進行波を解とする非線形波動方程式系の解は，2 種類に大別される．すなわち，定常進行波解と，静水状態を含む定常流解である．本手法では，定常進行波解を Newton-Raphson 法により求める．Newton-Raphson 法では，真値に近い初期値を用いると，比較的少ない回数の収束計算を経て，収束解を得ることができる．ところで，一般に，振幅の小さな定常進行波の理論解と数値解は，ほぼ等しいと考えられる．従って，振幅の小さな理論解に基づく物理量を初期値として与えればよい．すなわち，

波の振幅が小さくなる波速に対する，理論解の水面形，または，界面形と，そのときの速度場，または，速度ポテンシャル場とを初期値として与える．このうち，速度場，または，速度ポテンシャル場は，振幅の小さな理論解の波形を非線形波動方程式系の質量保存式に代入して得られる線形方程式系を解いて求めることができる．振幅の小さな理論解の水面形，または，界面形と，そのときの速度場，または，速度ポテンシャル場を初期値とし，Newton-Raphson 法を適用して，定常進行波を解とする非線形波動方程式系を解き，ある波速に対する，振幅の小さな理論解に近い定常進行波の数値解を求める．

ただし，こうして数値解を求める際には，適切な側方境界条件を与える必要がある．孤立波を対象とする場合，水面変動，界面変動及び流速は，水平方向の遠方において，ゼロに漸近する．従って，十分広い領域を対象とし，側方境界において，$F_0 = F_1$，かつ，$F_{n+1} = F_n$ とする．ここで，物理量 F は，水面変動 ζ，界面変動 η，または，速度ポテンシャルの重み係数 $f_{i,\alpha}$ である．また，添え字は，計算格子点番号を示しており，計算格子点番号が 0 及び $(n+1)$ の点は，中央差分を用いる場合の，側方境界の領域外に設けた仮想点である．

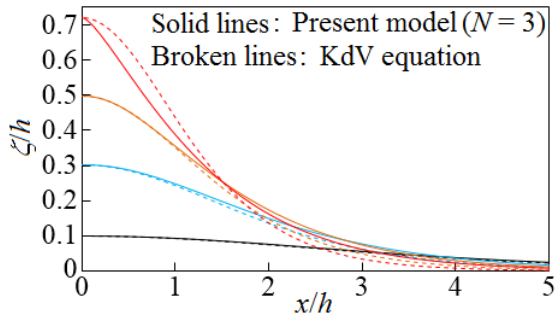
以上のように，適切な初期値及び側方境界条件を用いることにより，ある波速に対する，非線形波動方程式系の定常進行波の数値解が得られる．この数値解を改めて初期値とし，波速をやや大きな値に設定して同一の手法を適用すると，設定した波速に対する，定常進行波の数値解を得ることができる．すなわち，パラメタである波速を徐々に大きく設定し直し，初期値を更新していくことにより，解が存在する範囲内のそれぞれの波速に応じた，より大きな任意の振幅を有する定常進行波の数値解を順次得ることができる．

なお，時間発展を行なわない本計算においては，移流項を含めた各項の離散化に中央差分を用いて，計算精度の向上を図る．

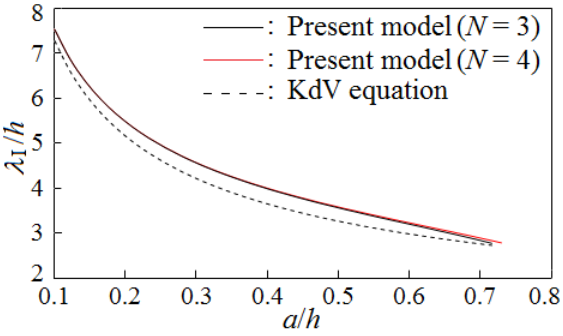
3. 表面孤立波解の検討

一様静水深 h の水域における表面波を対象とする．そして，提案した手法により，定常進行波を解とする非線形波動方程式系の孤立波解を求める．なお，速度ポテンシャルの展開項数は，$N = 3$，または，4 とする．また，計算領域長及び計算格子間隔は，それぞれ，$L/h = 50$ 及び $\Delta x/h = 0.02$ とする．そして，得られた孤立波解を KdV 理論解と比較する．

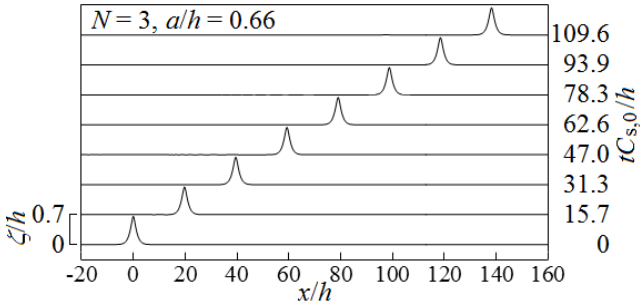
図−1 に，表面孤立波の波形を示す．ここで，横軸及び縦軸は，それぞれ，水平距離 x 及び水面変動 ζ を静水深 h で無次元化した値である．速度ポテンシャルの展開項数は，$N = 3$ である．波高水深比 a/h が比較的小さな $a/h = 0.1$ の場合，本手法と KdV 理論による表面孤立波の波形には，差異が殆ど見られない．一方，$a/h \geq 0.3$ の場合，本手法の数値解は，理論解よりも波の裾野が広がっており，特に，$a/h = 0.72$ の場合，本手法の数値解は，理論解よりも尖った峰の形状を示している．なお，本手法により得られた表面孤立波の最大振幅は，理論的な最大振幅とされている $a/h = 0.732$ と同程度の $a/h = 0.72$ である．



図−1 表面孤立波の波形の数値解及び理論解（波高水深比 a/h = 0.1, 0.3, 0.5, and 0.72）



図−2 波高水深比 a/h と相対代表波長 λ_I/h の関係



図−3 表面孤立波の数値解が 1 次元伝播した場合の各時刻の水面形（波高水深比 $a/h = 0.66$）

図−2 に，波高水深比 a/h と相対代表波長 λ_I/h の関係を示す．ここで，代表波長 $\lambda_I = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta \, dx \Big/ a$ である．数値解の代表波長は，理論解の代表波長よりも，やや長い．ここで，$N = 3$ と $N = 4$ の結果に殆ど違いが見られないため，N の値は，3 で十分であると言える．

図−3 は，数値解を初期値として与え，表面孤立波の 1 次元伝播を山下ら（2012）の数値モデルを用いて時間発展的に解いた場合の，表面形の時間変化を示している．ここで，$a/h = 0.66$ であり，また，計算格子間隔及び計算時間間隔をそれぞれ $\Delta x/h = 0.1$ 及び $\Delta t C_{s,0}/\Delta x = 0.003$ としている．$C_{s,0}$ は，線形浅水波の波速 $\sqrt{gh}$ である．これ

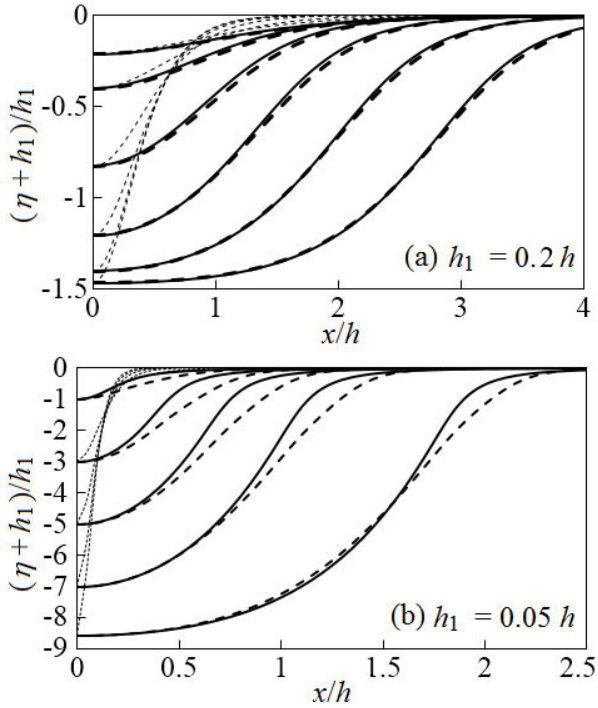


図-4 内部孤立波の波形の数値解及び理論解（実線: 本モデル; 太い破線: Choi・Camassa, 1999; 破線: KdV 方程式）

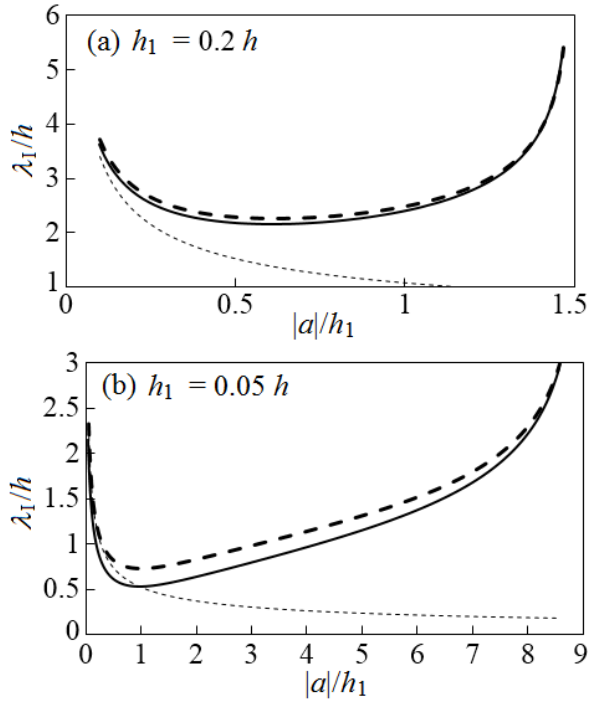


図-5 波高上層厚比 $|a|/h_1$ と相対代表波長 λ_1/h の関係（実線: 本モデル; 太い破線: Choi・Camassa, 1999; 破線: KdV 方程式）

より，ここで提案した手法を適用して求めた，大振幅の定常孤立波解が，安定して伝播することが確認できる．

4. 内部孤立波解の検討

(1) 理論解との比較

上・下面が固定水平板で挟まれた，全水深が h の 2 層流体を対象とする．そして，提案した手法により，定常進行波を解とする非線形波動方程式系の内部孤立波解を求める．速度ポテンシャルの展開項数は，$N=3$ とする．

上・下層の流体の密度比が $\rho_1/\rho_2 = 0.98$ であり，上層の層厚が $h_1 = 0.2h$，または，$0.05h$ であるとする．計算領域長 L は，上層の層厚が $h_1 = 0.2h$ の場合に，$L = 25h$，$h_1 = 0.05h$ の場合に，$L = 15h$ とし，また，計算格子間隔は，$\Delta x = 0.005h$ とする．

得られた内部孤立波解を KdV 理論解，並びに，Choi・Camassa (1999) による $O(h_1) = O(h_2)$ を仮定した場合の解と比較する．このうち，後者は，次式で与えられる．

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 = \left[\frac{3g(\rho_2-\rho_1)}{C^2(\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2)}\right]\frac{\eta^2(\eta-a_-)(\eta-a_+)}{(\eta-a_*)} \quad (1)$$

$$a_* = -\frac{h_1 h_2(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2} \quad (2)$$

$$a_\pm = -\frac{1}{2}q_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}q_1^2 - q_2} \quad (3)$$

$$q_1 = -\frac{C^2}{g} - h_1 + h_2 \quad (4)$$

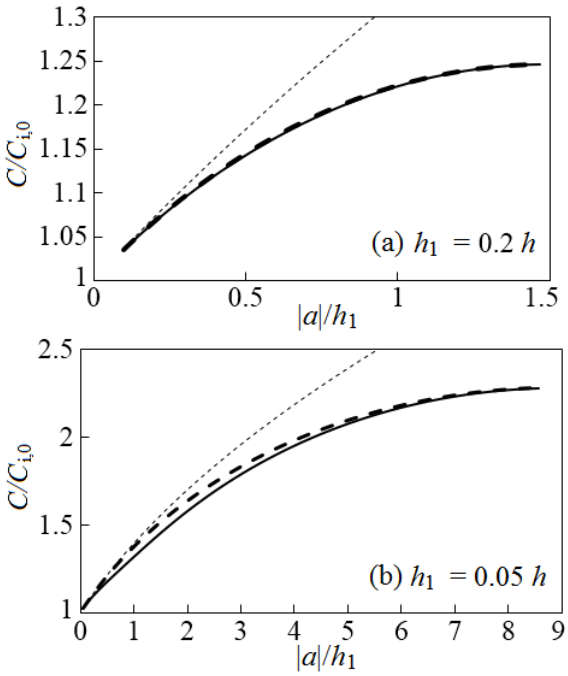
$$q_2 = h_1 h_2\left(\frac{C^2}{C_{i,0}} - 1\right) \quad (5)$$

$$\frac{C^2}{C_{i,0}^2} = \frac{(h_1-a)(h_2+a)}{h_1 h_2 - (C_{i,0}^2/g)a} \quad (6)$$

ここで，$C_{i,0}$ は，線形内部浅水波の波速である．

図-4(a) 及び (b) に，内部孤立波の波形を示す．内部孤立波の最大振幅 a_{max} を規定する critical level z_c は，上層の層厚が $h_1 = 0.2h$ 及び $0.05h$ の場合に，それぞれ，$(z_c + h_1)/h_1 = -1.49$ 及び -8.95 に位置する．ここで，$z_c = -h/\left(1+\sqrt{\rho_2/\rho_1}\right)$ である（船越・及川, 1989）．$h_1 = 0.2h$ の場合，本手法による孤立波の波形は，Choi・Camassa による波形とほぼ一致している．両者は，振幅層厚比が小さな場合においても，より急峻な波形を示す KdV 理論解と異なる．他方，上層が比較的薄い $h_1 = 0.05h$ の場合，本手法と Choi・Camassa による波形の差異が大きく，後者は，緩やかである．ただし，両者とも，谷の位置が critical level に近く，最大振幅に近い振幅の内部孤立波の波形が，台形状に近付くという特徴を再現している．

図-5(a) 及び (b) に，波高上層厚比 $|a|/h_1$ と相対代表波長 λ_I/h の関係を示す．本手法及び Choi・Camassa による代表波長は，振幅が中程度の場合に極値を有する．一方，KdV 理論による代表波長は，振幅が大きくなるに伴い単調に減少するため，振幅が大きい場合ほど，本手法及び Choi・Camassa による代表波長との差異が大きい．



図−6 波高上層厚比 $|a|/h_1$ と相対波速 $C/C_{i,0}$ の関係（実線: 本モデル; 太い破線: Choi・Camassa, 1999; 破線: KdV 方程式）

また，$h_1 = 0.2h$ の場合，本手法及び Choi・Camassa による代表波長は，ほぼ等しいが，$h_1 = 0.05h$ の場合，両者の違いが明瞭に現れ，Choi・Camassa による代表波長の方が大きい．本手法と Choi・Camassa による代表波長の差は，振幅が中程度の場合に，より大きくなる．ただし，Choi・Camassa の解は，$O(a/h) = 1$，かつ，$O(h/\lambda) << 1$ を仮定して，水深波長比 h/λが十分に小さな内部波を対象として導かれている．このため，例えば，$h_1 = 0.05h$ のとき，$|a|/h_1 = 1$ の場合，$O(h/\lambda_1) = 1$ であるため，Choi・Camassa の解は，理論上，適用範囲外となっている．

波高上層厚比 $|a|/h_1$ と相対波速 $C/C_{i,0}$ の関係を**図−6**(a) 及び (b) に示す．KdV 理論の波速は，振幅が小さな場合にのみ，本手法及び Choi・Camassa の波速に近い値となる．また，$h_1 = 0.05h$ の場合，振幅が中程度のときに，Choi・Camassa の波速が，本手法の値よりやや大きい．

更に，本手法及び Choi・Camassa の相対波速 $C/C_{i,0}$ は，上層厚が $h_1 = 0.2h$ 及び $0.05h$ の場合に，振幅が大きくなるにつれて，それぞれ，約 1.25 及び 2.28 に漸近する．

ところで，任意の層厚比及び密度比の 2 層問題において，最大振幅 a_{max} を有する内部孤立波の波速 C_{max} の理論値は，次式で与えられる（Grue ら，1999）．

$$C_{max}^2 = \frac{g h_1' h_2' (\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 h_2' + \rho_2 h_1'} \tag{7}$$

$$h_1' = h_1 + a_{max} \quad \text{and} \quad h_2' = h_2 - a_{max} \quad (h_1 < h_2) \tag{8}$$

$$a_{max} = \frac{h_2 \rho_1^{1/2} - h_1 \rho_2^{1/2}}{\rho_1^{1/2} + \rho_2^{1/2}} \tag{9}$$

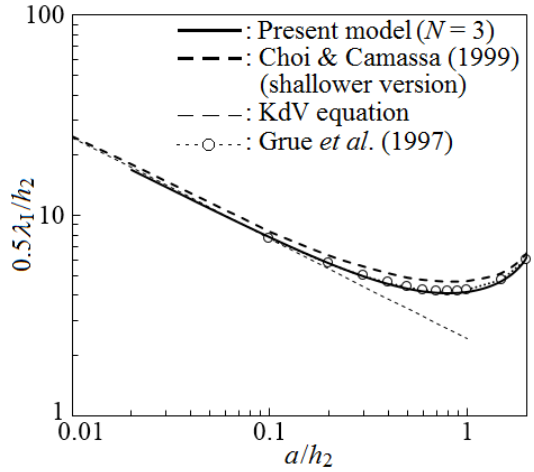


図-7 波高下層厚比 a/h_2 と相対代表波長の半分の値 $0.5\lambda_1/h_2$ の関係（密度比$\rho_1/\rho_2 = 0.63$, 上層厚 $h_1 = 0.836h$）

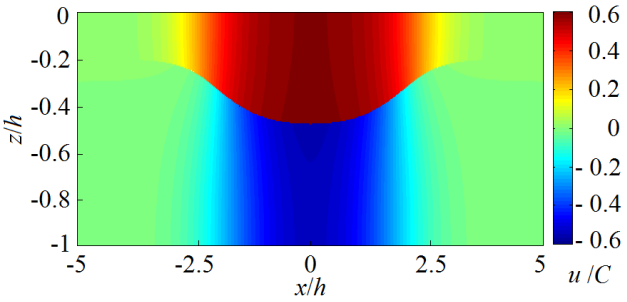


図-8 内部孤立波の水平方向流速分布（上層厚 $h_1 = 0.2h$, 波高上層厚比 $|a|/h_1 = 1.4$; C は，内部孤立波の波速である．）

式(7) ～ (9) は，C_{max} が，静水時の界面が critical level に位置する場合の線形内部浅水波の波速に等しいことを意味している．上・下層の密度比が $\rho_1/\rho_2 = 0.98$ である本計算条件の場合，$C_{max} \approx 0.07\sqrt{gh}$ となる．他方，**図−6**(a) 及び (b) に示した波速 C は，両者とも，$0.07\sqrt{gh}$ に漸近していることがわかる．従って，本手法及び Choi・Camassa の波速は，振幅が大きくなるにつれて理論値に漸近する．

図−7 は，上・下層の密度比が $\rho_1/\rho_2 = 0.63$，上層の層厚が $h_1 = 0.836h$ である場合の，波高下層厚比 a/h_2 と相対代表波長の半分の値 $0.5\lambda_1/h_2$ の関係を示す．なお，この場合の内部孤立波は，上に凸の波形を示す．ここで，Grue ら（1997）による結果は，Euler の式を数値解析的に解くことによって得られた内部孤立波の数値解である．本手法の解と Grue ら（1997）の解は，ほぼ一致しており，本手法の解の精度が非常に高いと言える．これに対して，KdV 理論は，振幅が大きい場合に，代表波長を過小評価している．また，Choi・Camassa は，中程度の振幅の場合，代表波長を過大評価しており，これは，$\rho_1/\rho_2 = 0.98$ の場合に見られる傾向と同様である．

(2) 内部孤立波の水粒子速度

上・下層の密度比が $\rho_1/\rho_2 = 0.98$ である場合の，内部孤立波に伴い生じる水粒子速度に関して調べる．**図−8** に，$h_1 = 0.2h$ 及び $|a|/h_1 = 1.4$ の場合の水平方向流速 u の分布

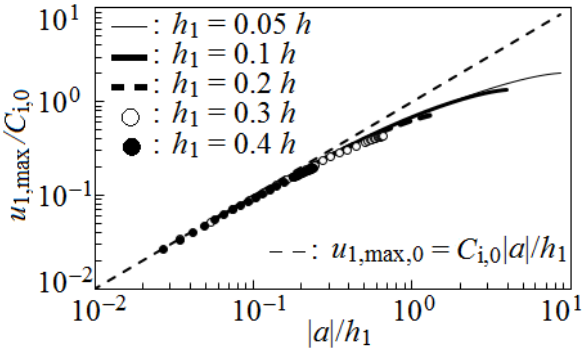


図-9 波高上層厚比 $|a|/h_1$ と上層における最大水平方向流速 $u_{1,\max}/C_{i,0}$ の関係（$C_{i,0}$ は，線形内部浅水波の波速である.）

を示す．ここで，u/C の最大値は，約 0.6 である．

図−9 に，波高上層厚比 $|a|/h_1$ と，上層における最大水平方向流速 $u_{1,\max}/C_{i,0}$ の関係を示す．ここで，$u_{1,\max}$ は，内部孤立波の谷の位置において現れる．また，破線は，線形内部浅水波理論から得られる，上層における最大水平方向流速 $u_{1,\max,0}$ を示す．$|a|/h_1 < 0.2$ の場合，$u_{1,\max}$ は，線形理論解 $u_{1,\max,0}$ とほぼ等しい．しかしながら，$|a|/h_1 > 0.2$ の場合，$u_{1,\max}$ は，線形理論解 $u_{1,\max,0}$ より小さくなる．

(3) 大振幅内部孤立波解を用いた 1 次元伝播解析

図−10 は，数値解を初期値として与え，内部孤立波の 1 次元伝播を山下ら（2010）の数値モデルを用いて時間発展させて解いた場合の，界面形の時間変化を示している．ここで，$h_1 = 0.2h$ 及び $|a|/h_1 = 1.4$ であり，計算格子間隔及び計算時間間隔は，それぞれ，$\Delta x/h = 0.1$ 及び $\Delta t C_{i,0}/\Delta x = 0.018$ である．図より，台形状に近い波形を有する大振幅内部孤立波が，安定して伝播する様子を確認できる．

図−11 に，振幅の異なる二つの内部孤立波解を初期条件として与えた場合の，各時刻の界面形を示す．ここで，$h_1 = 0.2h$ であり，二つの内部孤立波の波高上層厚比は，それぞれ，$|a|/h_1 = 1.4$ 及び 0.3 である．大振幅内部孤立波が，振幅の比較的小さな内部孤立波に追い付き，重合するとき，波の非線形干渉により，大振幅内部孤立波の波高が減少している．

5. 結　　論

非線形波動方程式系の定常進行波解を求めるための，Newton-Raphson 法を適用した手法を提案した．そして，本手法を用いて，変分原理に基づく非線形波動方程式系の表面孤立波解及び内部孤立波解を求め，理論解や数値解析解と比較し，解の妥当性を検討した．

その結果，表面孤立波解として，理論上の最大振幅と同程度である，波高水深比 $a/h = 0.72$ の，尖った峰の形状を有する数値解が得られた．また，水深波長比が大きな内部孤立波に対しても，速度ポテンシャルの展開項数を 3 とした場合，本波動方程式系の数値解の精度が十分に高いことが確かめられた．その際，振幅が大きく，波

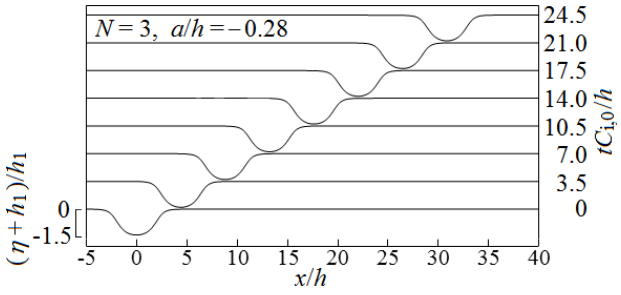


図-10 内部孤立波の数値解が 1 次元伝播した場合の各時刻の界面形（上層厚 $h_1 = 0.2h$, 波高上層厚比 $|a|/h_1 = 1.4$）

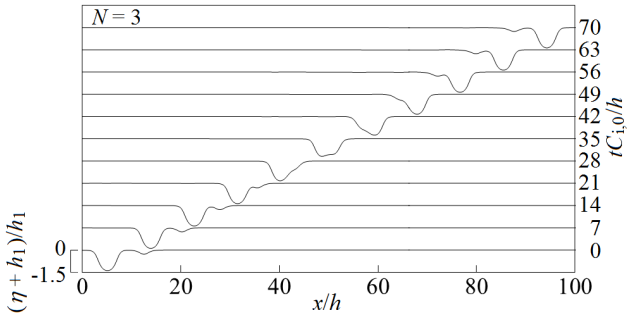


図-11 振幅の異なる内部孤立波の追い越しに見られる非線形干渉（上層厚 $h_1 = 0.2h$, 波高上層厚比 $|a|/h_1 = 1.4$ and 0.3）

形が台形状に近付いた内部孤立波の解も得ることができた．そして，大振幅の表面・内部孤立波の 1 次元伝播解析を行なったところ，得られた孤立波解が安定して伝播した．従って，本手法と波動方程式系を適用すれば，実水域でしばしば観測される大振幅内部波等の挙動を高効率・高精度で解析することが可能になると考えられる．

参　考　文　献

柿沼太郎 (2001): 透水性海浜における内部波の挙動の数値計算, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 146-150.

中山恵介・柿沼太郎・及川正行・辻　英一・丸谷靖幸 (2010): 内部ソリトン波の 3 次オーダ解による再現性の検討, 土木学会論文集 B2（海岸工学）, Vol. 66, No. 1, pp. 1-5.

船越満明・及川正行 (1989): 成層流体中の非線形波動, ながれ, 日本流体力学会, 第8巻, pp. 311-335.

山下　啓・柿沼太郎・中山恵介・及川正行・辻　英一・西川　学 (2010): 深水域や砕波点近傍における非線形内部波の挙動, 土木学会論文集 B2（海岸工学）, Vol. 66, No. 1, pp. 26-30.

山下　啓・柿沼太郎・山元　公・中山恵介 (2012): マッハステム形成過程の数値解析, 土木学会論文集 B2（海岸工学）, Vol. 68, No. 2, pp. 6-10.

Choi, W. and R. Camassa (1999): Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system, J. Fluid Mech., Vol. 396, pp. 1-36.

Grue, J., H. A. Friis, E. Palm and P. O. Rusas (1997): A method for computing unsteady fully nonlinear interfacial waves, J. Fluid Mech, Vol. 351, pp. 223-252.

Grue, J., H. A. Jensen, P. O. Rusas and J. K. Sveen (1999): Properties of large-amplitude internal waves, J. Fluid Mech, Vol. 380, pp. 257-278.

Peregrine, D. H. (1967): Long waves on a beach, J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 815-827.