土木学会論文集B2（海岸工学）
Vol. 67，No. 2，2011，I_006-I_010

ソリトン共鳴により発生する大振幅ソリトンの解析

Large Amplitude Internal Solitary Waves due to Solitary Resonance

中山恵介[1]・柿沼太郎[2]・辻　英一[3]・及川正行[4]

Keisuke NAKAYAMA, Taro KAKINUMA, Hidekazu TSUJI and Masayuki OIKAWA

To clarify the resonance of fully-nonlinear internal solitary waves which is one of the reasons for the occurrence of large amplitude internal waves, fully-nonlinear and strongly-dispersive internal wave equation model was applied, which attempted to investigate interaction of internal solitary waves in a two-dimensional plane. The 3rd order theoretical solutions for internal waves in a two-layer system was used for the initial conditions and progress of internal solitary wave was confirmed. Seven different incident wave angles were given, in which 'stem' was confirmed to appear when incident wave angle is less than critical angle. As a result, it is found that the amplified internal wave amplitude becomes about three times as much as the original amplitude.

1. はじめに

水面波の観測において，しばしば大振幅の波の発生が確認されており，特に大きな振幅の波はfreak waveなどとして知られ，多くの問題が未解決のままである．その中で，大振幅ソリトンの発生原因の一つとして，強非線形な孤立波の共鳴が考えられており，弱非線形モデルを利用して，表面波・内部波を問わず2次元空間において孤立波を干渉させることにより，与えた振幅の4倍にもおよぶ内部波が発生することが報告されている（辻・及川，2006；Funakoshi，1980）．その大振幅の孤立波は，2波が干渉する際の臨界角度付近において誘起されることが報告されている．しかし，それらの解は弱非線形の方程式を利用して得られた結果であり，強非線形・強分散関係を考慮した孤立波同士の干渉を検討したものではない．

一方で，塩水と淡水および日射の影響により形成される成層場における内部波にのみ着目すると，同様な大振幅の内部波が発生する可能性が指摘されている（Wallace・Wilkinson，1988；Helfrich，1992；Pierson・Weyhenmeyer，1994；Antenucci・Imberger，2001；Nakayama・Imberger，2010）．それらの研究は，主として低周波の内部波が高周波の内部波へと変形する際にソリトン分裂し発生する内部波を取り扱ったものである．その中で，大振幅の内部ソリトン波が斜面上で砕波することにより底層の物質を巻き上げ，密度界面下において発生する貫入現象により長期的な物質輸送が発生することが指摘されており，大振幅の内部ソリトン波の発生機構解明が重要であることが指摘されている（Nakayama・Imberger，2010）．

Choi・Camassa（1999）に代表される理論や，長波から発生するソリトン分裂に関して論じたHornら（2001）の研究が存在する（Holloway，1997）が，著者らは強非線形・強分散の波の干渉を検討するための初期条件を与えるために，9次オーダーの内部波の方程式（Mirie・Pennell, 1989）を利用して3次オーダまでの解を導出した（中山ら, 2010）．その解の妥当性，利用限界について，強非線形強分散内部波モデル（柿沼，2001；Nakayama・Kakinuma，2010）による再現性の検討を行い，強非線形・強分散関係を持つソリトンの再現計算に成功した（中山ら, 2010）．しかし，2次元空間において孤立波が干渉することにより発生する，振幅が4倍にもおよぶ内部波について，強非線形・強分散関係を考慮しても同様に発生するかどうかについては不明である．

そこで本研究では，3次オーダ解を強非線形強分散内部波モデルに利用して2次元平面におけるソリトンの干渉を検討し，大振幅ソリトンの発生について論じることを目的とする．

2. 2次元平面における内部波の進行

2波の干渉を解析するためには，2次元平面において内部波が安定して進行することを確認しなくてはならない．まず，9次オーダの内部波の方程式（Mirie・Pennell,1989）を利用して導出された3次オーダの波形の解の主要な部分を以下に示す（図-1）．係数等の詳細は，紙面の都合上省略するため，中山ら（2010）をご覧いただきたい．

1 正会員　博(工)　北見工業大学工学部教授
社会環境工学科
2 正会員　博(工)　鹿児島大学大学院准教授
理工学研究科 海洋土木工学専攻
3 非会員　博(理)　九州大学助教
応用力学研究所
4 非会員　工博　福岡工業大学教授
知能機械工学科

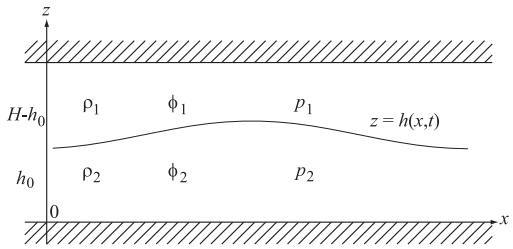

図-1　2層流体システム

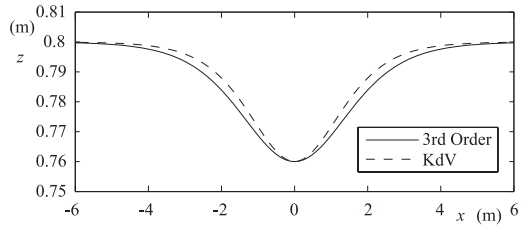

図-2　3次オーダの孤立波解とKdV理論解の比較

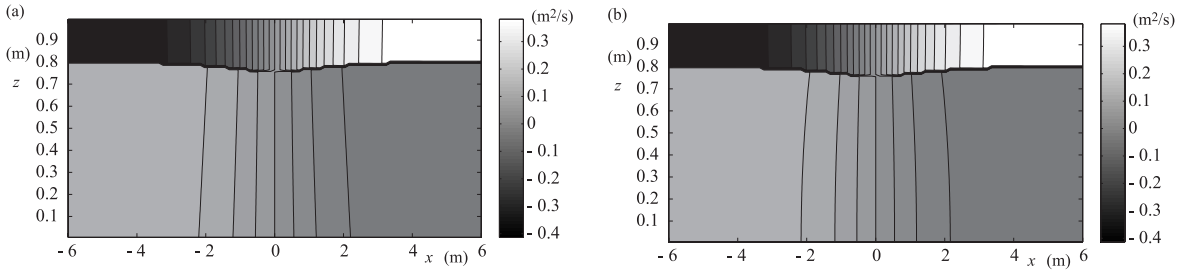

図-3　(a) 鉛直方向に対して2次の項まで考慮したベキ乗関数により再現された速度ポテンシャル
(b) 3次オーダ解による速度ポテンシャル

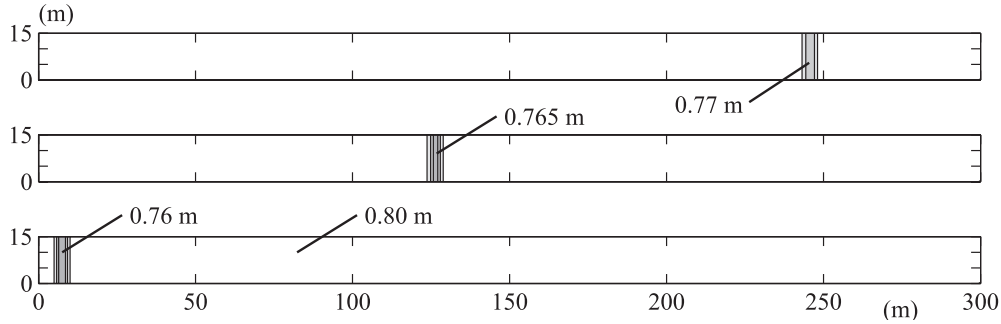

図-4　下から初期状態，100秒後，200秒後における密度界面のコンタ図

$$\sigma = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$R = \frac{H - h_0}{h_0} \quad \cdots\cdots (2)$$

$$C_0 = \sqrt{\frac{1-\sigma}{1+\sigma/R}} \quad \cdots\cdots (3)$$

$$a = \varepsilon A_{11} + \varepsilon^2 (A_{21} + A_{22}) + \varepsilon^3 (A_{31} + A_{32} + A_{33}) \quad \cdots\cdots (4)$$

$$S = \mathrm{sech}^2 X \quad \cdots\cdots (5)$$

$$X = \frac{\sqrt{3K\varepsilon}}{2h_0}(x - C_R\, t) \quad \cdots\cdots (6)$$

$$C_R = \sqrt{g h_0} C_0 \left(1 + \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \varepsilon^3 C_3\right) \quad \cdots\cdots (7)$$

$$h = h_0 (1 + \zeta) \quad \cdots\cdots (8)$$

$$\zeta = \varepsilon A_{11} S + \varepsilon^2 \left(A_{21} S + A_{22} S^2\right) + \varepsilon^3 \left(A_{31} S + A_{32} S^2 + A_{33} S^3\right) \quad \cdots (9)$$

ここで，ρ_1とρ_2は上層密度と下層密度，Hとh_0は全層と下層厚さ，ζは界面変位，p_1とp_2は上層と下層の圧力，aは振幅，hは界面位置，Kは水平空間スケールに関する係数，A_{ij}（i, j=1~3）は界面変位に関する係数，C_i（i =1~3）は波速に関する係数である．

対象とした内部ソリトン波の条件は，上層厚さ0.20 m，下層厚さ0.80 m，上層密度／下層密度=1.000/2.000，振幅=0.8 × 0.05 mとした．Nakayama（2006），Nakayama・Kakinuma（2010），中山ら（2010）により，振幅の大きな非線形性の強い3次オーダ解による内部ソリトン波は，KdV理論による解よりも裾野が広がった形状として与えられることが知られている．本研究で与えた条件でも，同様な傾向を確認することが出来た（図-2）．

非回転場における2層流体の方程式である強非線形強分散内部波モデルが，速度ポテンシャルをzのべき乗の関数により再現することから，考慮する項数による再現

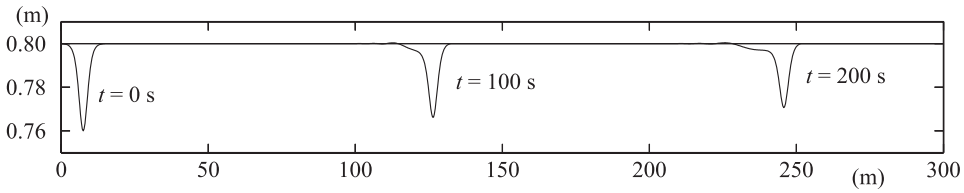

図-5　横断方向中央における界面位置の時間変化．初期状態，100秒後，200秒後

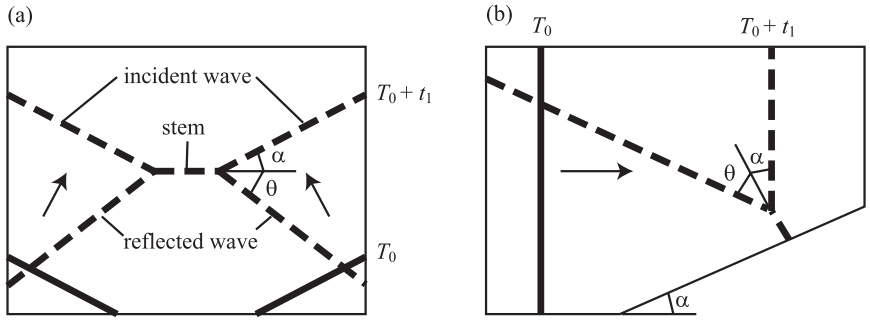

図-6　(a) ソリトンの共鳴によるstem発生の概念図．α：入射角．θ：反射角．T_0：ある時刻．t_1：ある時刻から経過した時間
(b) Funakoshi（1980）によるstem発生計算領域

性の検討を行う必要がある．内部ソリトン波を再現するために必要な計算メッシュ数は，進行方向に対して50程度であり，後ほど具体的に示すが，2次元平面における内部ソリトン波の干渉に関する検討を行うためには，最低でも1000 × 500程度のメッシュ数が必要となる．そのため，計算機容量の制限から，べき乗の関数で再現する際に利用する項数を2とした．速度ポテンシャルの再現性の検討を行ってみたところ，2次の項まで考慮した速度ポテンシャルの3次オーダ解の再現性に関して，わずかながら異なる部分が見られるが，ほぼ良く再現できていることが確認された（図-3）．また，考慮する項を2次までとし計算の負担を減らしたが，全領域を対象とした計算を実行することは計算機容量の制限から困難であるため，対象計算領域を制限することとした．制限の方法は，進行している内部ソリトン波を含む45mの幅のみの計算を実施し，それ以外の領域にはスポンジ層を設けてエネルギーを減衰させるという方法である．

実際に2次の項まで考慮した強非線形強分散モデルが2次元平面内における内部ソリトン波の進行を再現できるかどうかを確認するために，メッシュ数1000 × 50（300m × 15m）を与えて200秒間の再現計算を実施した（図-4）．2次元平面内におけるコンタでみると，ほぼその形状が保たれているようにみえる．しかし，進行方向の切断面における密度界面の時間変化から，内部ソリトン波の後方に，わずかながらであるが振幅の小さな波が分離しつつあることが分かった（図-5）．中山ら（2010）により，同様な計算条件で30秒程度は形状が保たれることが報告されていたが，より長期の計算における安定性の検討が必要であることが分かった．

3. 境界条件の取り扱い方法の開発

孤立波の2次元平面における干渉を再現する方法として，辻・及川（2006）を利用することが考えられる．そのためにはデカルト座標系を斜めに横断する内部ソリトン波を与えなくてはならない．また，斜めに交差する内部ソリトン波の再現を行うためには，交差角度にも依存するが，一般的に膨大な計算領域を確保しなくてはならない．そこで本研究では，それらの問題を解決するため，Funakoshi（1980）による単一ソリトンの進行，反射により再現する方法を用いることとした（図-6）．これにより，2つのソリトンが臨界角度程度以下を持って干渉することにより共鳴し合うと，単一のソリトンよりも振幅の大きなstemが発達する様子を再現できることとなる．

Funakoshi（1980）による方法を用いることで，計算領域および斜めに交差する内部ソリトン波の問題を解決できるが，計算領域中に設置する，計算格子に対して傾斜した壁における境界条件をどのように取り扱うべきかという問題を解決しなくてはならない．内部波の境界上での反射を取り扱う方法として，Simanjuntak etc. and Nakayama（2010）により法線方向の流速をゼロとして取り扱う手法が提案されている．本論文では速度ポテンシャルを変数として扱っていることから，直接，その手法を適用することはできない．そこで本論文では，同様な考えに基づき，運動方程式を介して斜め境界を取り扱う埋め込み境界法を提案する（図-7）．法線方向の流速はゼロでなくてはならないため，式（10）を満たす必要

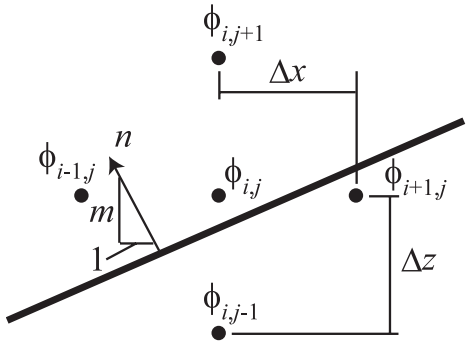

図-7　埋め込み境界の概念図

がある．

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy=0 \quad \cdots\cdots(10)$$

ここで，ϕは速度ポテンシャルである．

つまり，壁の中と考えられる$\phi_{i+1,i}$と$\phi_{i,i-1}$を，式（11）および式（12）で与えることにより，境界における法線方向の流速ゼロの条件を満たすこととなる．

$$\phi_{i+1,j}=\phi_{i,j}-m\frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j}}{\Delta y}\Delta x \quad \cdots\cdots(11)$$

$$\phi_{i,j-1}=\phi_{i,j}+\frac{1}{m}\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j}}{\Delta x}\Delta y \quad \cdots\cdots(12)$$

なお連続式に関して，強非線形強分散方程式モデルにおいて保存系での取り扱いが出来ないため，矩形格子を用いて連続関係が満足されるように取り扱うこととした．

4. 解析結果

上層・下層厚さを0.2mと0.8m，上層・下層密度を500 kg/m³と1000 kg/m³，振幅を下層厚さ×0.05（= 0.04m）として与えた場合，臨界角度は33.4度が得られる．stemは臨界角度以下において発生するため，stem発生による再現性の検証も含め，計算条件として入射角度10度，15度，20度，25度，30度，35度，40度（case 1からcase 7と呼ぶ）を与えることとした．計算領域のメッシュ数は，それぞれのケースにおいて1400 × 480（420m × 144m），1200 × 560（360m × 168m），1000 × 600（300m × 180m），以下case 7まで同じ条件とした．

（1）stem発生：case 1からcase 3

臨界角度が33.4度であることから，case 1からcase 5までにおいてstemの発生が予想された．しかし，明確なstemはcase 1からcase 3のみにおいて確認された（図-8）．第2章で示された通り，内部ソリトン波の後方に振幅の小さな波が分離する傾向にあり，内部ソリトン波の振幅が減少してしまったことが関連していると考えられる．

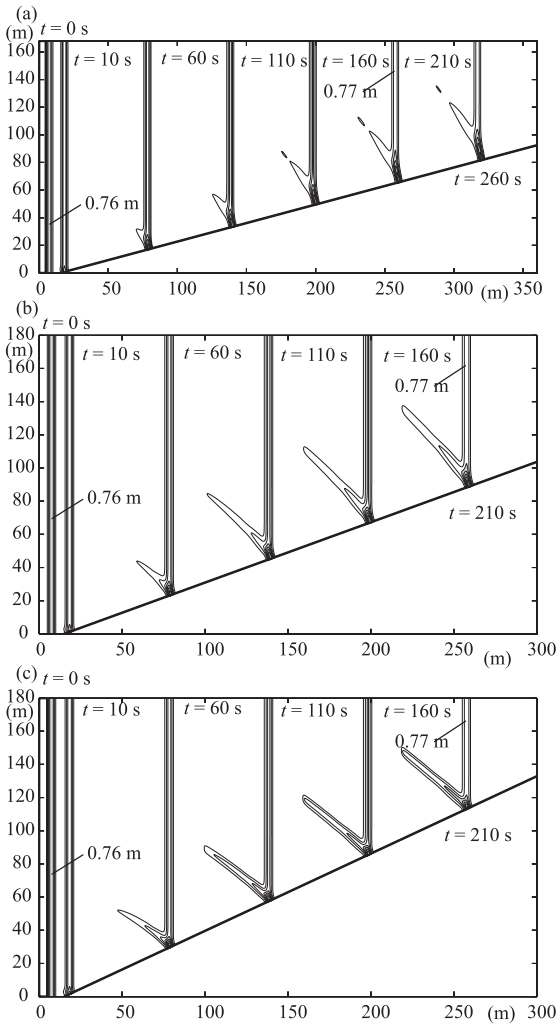

図-8　内部界面位置のコンタ．
（a）入射角度15度（case 2）における内部ソリトン波の時間変化（260秒後まで50秒毎）．
（b）入射角度20度（case 3）における内部ソリトン波の時間変化（210秒後まで50秒毎）．
（c）入射角度25度（case 4）における内部ソリトン波の時間変化（210秒後まで50秒毎）

つまり，振幅の減少により臨界角度が小さくなり，理論的に得られた臨界角度よりも小さな30度のケースにおいてstemが発生しなかったものと推測される．stemの発達についてcase 2とcase 3を比較すると，辻・及川（2006）において示されているように，入射角度が小さいcase 2の方がより早く発達していることが確認された．また，case 2ではstemがより長く発達するため，case 3と比較して反射波の発達に時間を要することが分かった．

（2）振幅の増大率について

内部界面位置のコンタから，case 4では十分に反射波が発達しているが，case 2やcase 3ではまだ発達段階にあ

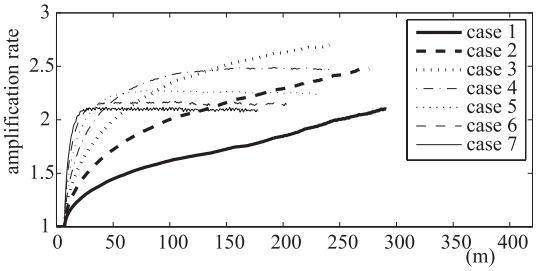

図-9　増幅率の時間変化．case 1からcase 7

るようにみえる（**図-8**）．そこで，内部ソリトン波の振幅に対する最大振幅の比を計算し，各ケースにおける増幅率の時間変化を示す（**図-9**）．case 4からcase 7まではある時間に達すると一定値に落ち着いている様子が示されているが，case 1からcase 3については増幅率が時間と共に増大している途中であることが分かる．内部界面位置のコンタにおいて示されたように，反射波が十分に発達していないことからも，特に入射角度が小さいcase 1ではより長時間の計算が必要であることが分かる．

今回採用した幾つかのケースにおいて，増幅率が2を大きく超えており，freak waveとして存在するような波が再現されていることが確認された．特にcase 3は計算領域の関係から230秒程度までしか増幅率が計算されていないが，増加途中において増幅率2.7を超えており，計算領域を大きくすることにより，より大きな増幅率を再現することが出来ると考えられる．辻・及川（2006）により，KP方程式を利用することにより最大で増幅率は4にまで達することが示されており，実際にFunakoshi（1980）は，定常状態に達しているかどうかの問題は残るが，数値計算により増幅率3.5まで確認している．しかし，KP方程式により得られる増幅率4は，進行方向に直交する成分に関して弱非線形を仮定していることや，内部波について同様な適用性を確保できるかなどの疑問が残っている．

今後，安定した単一の内部ソリトン波の発生，強非線形強分散方程式モデルによる高次項を考慮した再現，より広い計算領域の確保により，辻・及川（2006）が示した増幅率との比較検討を行う必要がある．

5. おわりに

2次元平面における内部ソリトン波の干渉に関する検討を行い，以下のような結論を得た．

a）デカルト座標系において斜面境界を取り入れる方法を提案した．

b）2次元平面における内部ソリトン波の干渉によるstemの発生を確認した．

c）内部ソリトン波が干渉することにより，KP理論でも示されているような増幅率2以上の波を再現することが出来た．

参　考　文　献

柿沼太郎（2001）：透水性海浜における内部波の挙動の数値計算, 海岸工学論文集, 第48巻, pp. 146-150.

辻　英一・及川正行（2006）：Extended Kadomtsev-Petviashvili方程式の孤立波解の斜め相互作用, 応用力学研究集会報告, No.17ME-S2, No.37.

中山恵介, 柿沼太郎, 及川正行, 辻　英一, 丸谷靖幸（2010）：内部ソリトン波の3次オーダー解による再現性の検討, 海岸工学論文集, 第57巻, pp.1-5.

Antenucci, J..P. and J. Imberger. (2001) : Energetics of long internal gravity waves in large lakes, Limnology and Oceanography., Vol.46, pp. 1760-1773.

Choi W, and R. Camassa (1999) : Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system, Journal of Fluid Mechanics., Vol. 396, pp. 1-36.

Funakoshi, M. (1980) : Reflection of obliquely incident solitary waves, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.49, No.6, pp. 2371-2379.

Helfrich, K.R. (1992) : Internal solitary wave breaking and run-up on a uniform slope, Journal of Fluid Mechanics., Vol.243, pp. 133-154.

Holloway, P.E., E. Pelinovsky, T. Talipova, and B. Barnes. (1997) : A nonlinear model of internal tide transformation on the Australian North West Shelf, Journal of Physical Oceanography., Vol.27, pp. 871-898.

Horn, D.A., J. Imberger, and G.N. Ivey. (2001) : The degeneration of large-scale interfacial gravity waves in lakes, Journal of Fluid Mechanics., Vol.434, pp. 181-207.

Mirie, R.M. and S.A. Pennell. (1989) : Internal solitary waves in a two-fluid system, Physics of Fluids, A1 (6), pp.986-991.

Nakayama K. (2006) : Comparisons of using CIP, compact and CIP-CSL2 schemes for internal solitary waves, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.51, pp.197-219, doi: 10.1002/fld.1112.

Nakayama K. and T. Kakinuma. (2010) : Internal waves in a two-layer system using fully nonlinear internal-wave equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.62 (5), pp.574-590, doi: 10.1002/fld.2037.

Nakayama K. and J. Imberger. (2010) : Residual circulation due to internal waves shoaling on a slope, Limnology and Oceanography., Vol. 55, pp. 1009-1023.

Pierson, D.C., and G. A. Weyhenmeyer. (1994) : High resolution measurements of sediment resuspension above an accumulation bottom in a stratified lake, Hydrobiologia , Vol.284, pp. 43-57.

Simanjuntak M. A., J. Imberger and K. Nakayama (2009), Numerical wave drag due to stair-step topography in a geophysical flow model, Journal of Geophysical Research, 114, C12, doi: 10.1029/2008JC005051.

Wallace, B.C., and D. L. Wilkinson. (1988) : Run-up of internal waves on a gentle slope in a twolayered system, Journal of Fluid Mechanics., Vol.191, pp. 419-442.